Leçon n° 108 : Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.

Soit G un groupe.

I/ Parties génératrices de groupes.

A/ Préambule. [PER]

Définition 1 : Définition de partie générée par une partie A et partie génératrice.

Définition 2 : Groupes de type fini.

Exemple 3 : $\mathbb{Z}$ est de type fini, pas $\mathbb{Q}$, tout groupe fini est de type fini.

Définition 4 : Groupe dérivé.

Proposition 5 : Abélianisé.

B/ Groupes monogènes et cycliques, cas de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. [PER] [ROM]

Définition 6 : Monogène, cyclique.

Proposition 7 : Si G est d'ordre premier, G est cyclique.

Proposition 8 : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est cyclique d'ordre n et ses générateurs sont les $\overline{k}$ pour $k \wedge n = 1$.

Corollaire 9 : $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ possède donc $\varphi(d)$ générateurs d'ordre $d|n$ où φ est l'indicatrice d'Euler.

Application 10 : Tout sous-groupe fini d'un corps multiplicatif est cyclique.

Application 11 : $\mathbb{F}_q^\times$ est cyclique.

Proposition 12 : Si G monogène infini, alors $G \simeq \mathbb{Z}$; si G cyclique, alors $G \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Proposition 13 : Les sous-groupes d'un groupe cyclique sont cycliques.

Proposition 14 : $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ est cyclique ssi $n = 2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha$

C/ Groupes abéliens de types finis. [ROM]

Théorème 15 : Théorème de structure des groupes abéliens de type fini.

Corollaire 16 : Théorème de structure des groupes abéliens finis.

Application 17 : Détermination à isomorphismes près de tous les groupes abéliens d'ordre donné avec théorème chinois.

II/ Le cas du groupe symétrique et applications.

A/ Systèmes de générateurs. [PER] [ROM] [U] [CAL]

Théorème 18 : Théorème de décomposition en cycles disjoints des permutations.

Application 19 : Détermination de l'ordre d'une permutation.

Corollaire 20 : Les transpositions engendrent $\mathfrak{S}_n$.

Exemple 21 : Exemple de décomposition.

Application 22 : Théorème de Schwartz.

Application 23 : Groupes d'isométries du tétraèdre et du cube.

Proposition 24 : Les autres systèmes de générateurs de $\mathfrak{S}_n$ sont $\{(1,k)\}$, $\{(k,k+1)\}$ et $\{(1,2),(1,2,\dots,n)\}$.

Remarque 25 : Il est utile d'avoir des systèmes de générateurs de cardinaux petits.

B/ Cas du groupe alterné. [ROM]

Proposition 26 : Existence et unicité du morphisme signature.

Définition 27 : Groupe alterné.

Développement 1

Lemme 28 : $\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles et y sont conjugués.

Théorème 29 : $\mathfrak{A}_n$ est simple pour $n \geq 5$.

Corollaire 30 : Les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$.

III/ Le cas du groupe linéaire et ses sous-groupes.

A/ Systèmes de générateurs. [ROM] [PER] [FGNAlg2]

Définition 31 : Matrices de transvections et dilatations.

Développement 2.a)

Théorème 32 : $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections.

Corollaire 33 : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est engendré par les transvections et dilatations.

Corollaire 34 : Les sous-groupes dérivés.

Proposition 35 : Systèmes de générateurs de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Corollaire 36 : Les sous-groupes dérivés.

B/ Applications en topologie. [ROM] [FGNAlg2]

Développement 2.b)

Proposition 37 : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes.

Proposition 38 : $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ est connexe par arcs.

Proposition 39 : $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes : $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{O}_n^-(\mathbb{R})$.

Références :

— [PER] Perrin p. 9 et p. 95
— [ROM] Rombaldi Algèbre 2nd éd. p. 37, p. 139 et p. 279
— [U] Ulmer Théorie des groupes p. 46, p. 55-59
— [CAL] Caldéro Histoires hédonistes tome 1 p. 250
— [FGNAlg2] Francinou Gianella Nicolas Algèbre 2 p. 177